別紙 1

論文の内容の要旨

論文題目	力学系の不動点近傍解析のための精度保証法の展開
学　位 申請者	樋脇　知広

本論文では、力学系における局所的な理論を精度保証の手法を用いて検証・拡張するためのツールの開発を目的としている。特に、吸引的な周期軌道を持つことを想定される力学系に対し、周期軌道の存在証明および吸引域の特定を精度保証によって行う方法を提示する。さらに、必ずしも吸引的ではない平衡点・不動点に対し、その近傍でLyapunov関数となる二次形式の構成方法を示し、その定義域を精度保証によって確定するための手法を連続力学系・離散力学系の双方に対して展開する。

第I部では、はじめに研究の背景と論文構成について説明を行う。特に、近年の力学系分野での精度保証法の応用について触れる。その後、精度保証付き数値計算の手法を紹介する。まず区間演算についての説明と，平均値形式と呼ばれる区間拡大を抑制するための方法を示す。さらに、不動点検証のための精度保証法や、常微分方程式の解に対する精度保証法（Lohner 法）など、基本的な技法を述べる。特に、常微分方程式に付随する変分方程式を精度保証するC1-Lohner法にも言及する。

つぎに、力学系の用語を説明する。また、平衡点・不動点の安定性解析について、線形化方程式との関連を含めての解説を行う。

第II部では、周期解の存在の精度保証による証明と、これが漸近安定な周期軌道となる場合の吸引域の同定に関する精度保証法を紹介・提案する。

まず既存の方法であるポアンカレ写像を構築する方法および二点境界値問題と位相条件を用いる方法を紹介したあと、著者らの開発した樋脇・山本の方法の導出を行う。さらに、樋脇・山本の方法が、特別な位相条件を伴った二点境界値問題と同値であることを示し、この位相条件が計算効率を上げることの根拠を明示する。

数値例では、ポアンカレ写像を構築する方法に対する樋脇・山本の方法の優位性を見た後、位相条件による計算効率の差異を例示する。
次章では、精度保証法でポアンカレ写像を構築するための条件について具体的に述べている。これをもとに、吸引域の同定法として、ふたつの新しい方法を提示している。一つは、前述の樋脇・山本の方法から導かれるものであり、もう一つはポアンカレ写像の縮小性を精度保証する方法である。これらは周期の扱いに差異があり、また計算効率に差が出る場合があることが触れられる。その後、数値例によってそれぞれの方法の有効性が示されている。

第III部では、リャプノフ関数を精度保証によって構成する方法を提示する。古典的なリャプノフ関数の定義を述べた上で、これが安定な平衡点・不動点だけに対するものであることを指摘し、鞍点型の不安定性を持つ平衡点・不動点にも適用できる形に拡張を行う。さらに、既存の方法のうち、数学的に厳密なリャプノフ関数を与えるものに言及し、本論文で展開する方法との目的・構成方針の違いについて説明する。
次に、連続力学系に対するリャプノフ関数の構成法を導出する。平衡点の近傍とやや離れた位置とで確定方法が異なるため、これをふたつのステージに分けて扱っている。近傍では問題をある行列の負値性の証明に還元して扱い、遠方ではリャプノフ関数の条件を直接精度保証で検証する。また、m錐体法と呼ぶ方法を導入し、リャプノフ関数の形状をコントロールすることを可能としている。これらについて、数値例によって実際の適用状況や有用性を示している。
さらに、離散力学系に対するリャプノフ関数の構成法を述べている。原理的には連続力学系に対するものとほぼ同じである。離散力学系に対してもm錐体法が導入でき、これを含めた数値例が示される。特に、第II部で述べたポアンカレ写像との組み合わせによって、周期軌道の近傍におけるリャプノフ関数の構築が可能であることが示されている。
最後に、全体のまとめを述べ、他の研究者による本研究の応用に触れた後、今後の展望を示す。

別紙２

論文審査の結果の要旨

学位申請者氏名　樋脇　知広

審査委員主査　山本　野人

委員　緒方　秀教

委員　山本　有作

委員　仲谷　栄伸

委員　小山　大介

委員　渡部　善隆

本論文では、力学系における平衡点・不動点や周期軌道に関する解析のためのツールを、精度保証法の手法を用いて提示している。

第１章では、研究の背景と論文構成についての説明がある。特に、近年の力学系分野での精度保証法の応用について触れている。

第２章では、精度保証付き数値計算の手法を紹介する。まず、区間演算についての説明があり、平均値形式と呼ばれる区間拡大を抑制するための方法が紹介される。さらに、不動点検証のための精度保証法や、常微分方程式の解に対する精度保証法など、基本的な技法が述べられる。特に、常微分方程式に付随する変分方程式を精度保証するC1-Lohner法に言及する。

第３章では、力学系の用語を説明している。また、平衡点・不動点の安定性解析について、線形化方程式との関連を含めての解説がある。

以上を第I部としている。

第II部では、周期解の存在の精度保証による証明と、これが漸近安定な周期軌道となる場合の吸引域の同定に関する精度保証法を紹介・提案している。

第４章では、既存の方法であるポアンカレ写像を構築する方法および二点境界値問題と位相条件を用いる方法を紹介したあと、申請者らの開発した樋脇・山本の方法の導出を行っている。さらに、樋脇・山本の方法が、特別な位相条件を伴った二点境界値問題と同値であることを示し、この位相条件が計算効率を上げることの根拠を明示している。数値例では、ポアンカレ写像を構築する方法に対する樋脇・山本の方法の優位性を見た後、位相条件による計算効率の差異を例示している。

第５章では、精度保証法でポアンカレ写像を構築するための条件について具体的に述べている。特に、5.1節で詳細な説明を行っている。これをもとに、吸引域

の同定法として、ふたつの新しい方法を提示している。一つは、前述の樋脇・山本の方法から導かれるものであり、もう一つはポアンカレ写像の縮小性を精度保証する方法である。これらは周期の扱いに差異があり、また計算効率に差が出る場合があることが触れられる。その後、数値例によってそれぞれの方法の有効性が示されている。

第III部では、リャプノフ関数を精度保証によって構成する方法を提示する。リャプノフ関数の重要性は広く認識されているが、与えられた力学系に対して数学的に厳密なリャプノフ関数を構成する方法は非常に少ない。

まず第６章で古典的なリャプノフ関数の定義を述べた上で、これが安定な平衡点・不動点だけに対するものであることを指摘し、鞍点型の不安定性を持つ平衡点・不動点にも適用できる形に拡張を行う。さらに、既存の方法のうち、数学的に厳密なリャプノフ関数を与えるものに言及し、本論文で展開する方法との目的・構成方針の違いについて説明している。

第７章では、連続力学系に対するリャプノフ関数の構成法を導出する。その眼目は、リャプノフ関数の候補が実際にリャプノフ関数となる定義域を精度保証法で確定するところにある。平衡点の近傍とやや離れた位置とで確定方法が異なるため、これをふたつのステージに分けて扱っている。近傍では問題をある行列の負値性の証明に還元して扱い、遠方ではリャプノフ関数の条件を直接精度保証で検証する。また、m錐体法と呼ぶ方法を導入し、リャプノフ関数の形状をコントロールすることを可能としている。これらについて、数値例によって実際の適用状況や有用性を示している。

第８章では、離散力学系に対するリャプノフ関数の構成法を述べている。原理的には連続力学系に対するものとほぼ同じであるが、このことは連続力学系と離散力学系を同一の枠組みで扱えることを意味し、特にふたつの力学系の混合であるハイブリッド力学系への適用が期待できる。離散力学系に対してもm錐体法が導入でき、これを含めた数値例が示される。特に、第II部で述べたポアンカレ写像との組み合わせによって、周期軌道の近傍におけるリャプノフ関数の構築が可能であることが示されている。

第９章では、全体のまとめを述べ、他の研究者による本研究の応用に触れた後、今後の展望を述べている。

以上のように、本論文は計算科学の分野と純粋数学の分野をつなげる意義のある提案を含み、独創性・発展性に富む内容であると言える。よって本審査委員会は、申請者に対し博士（理学）の学位を授与することを可と判定した。